3ème Maths : M2
Durée : 3heures
Date : le 08 / 03 / 2008
Coefficient : 4

Devoir de Synthèse N°2
Mathématiques

Lycée secondaire Teboulba

Exercice 1 :(4,5 points)

I – Une urne contient 5 boules rouges et n boules noires. (les boules sont indiscernables au toucher)
On tire simultanément 3 boules de l'urne
Déterminer le nombre de boules noires dans l'urne pour que le nombre de tirage possible d'avoir une seule boule rouge soit égal à **30** .

II – On prend dans la suite $n=4$ et on considère que les 5 boules Rouges numérotées : 0, 0, 1, 2, 2 et les 4 boules Noires numérotées : 1, 2, 2, 2.

1) **On tire simultanément 3 boules de l'urne.**

a – Lors d'un tirage on note les événements :

A : « 3 boules portant le même numéro ».

B : « 3 boules de même couleurs ».

Calculer *Card* (*A*), *Card* (*B*), $card(A \cap B)$ et $card(A \cup B)$.

b – Déterminer le nombre de tirage possible pour que l'on ait:

C : « le produit de trois numéros obtenus est <u>nul</u> ».

2) **On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.**

Déterminer le nombre de tirage possible pour que l'on ait:

G : « obtenir 2 boules portant le numéro 0».

H : « obtenir une boule numérotée 1 pour la première fois au 3ème tirage ».

III **–** Soit *f* une fonction définie par : $f(x)=(x+1)^n \quad , n \in IN^*$

1) En utilisons la formule de Binôme développer $f(x)$.

2) *a* – Calculer de deux manières différentes $f'(x)$.

b – En déduire la valeur de : $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+.....+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n$.

Exercice 2 :(4,5 points)

I – On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2z+4=0$.

1) Vérifier que $1+i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation.

2) En déduire l'autre solution.

II – Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit I, M et K les points d'affixes respectives : $z_I=1+i\sqrt{3}$, $z_M=1-i\sqrt{3}$ et $z_K=2i$.

1) Déterminer le module et un argument de z_M

2) a – La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme M en A. Montrer que : $z_A = \sqrt{3} + i$.

b – On appelle C le symétrique de A par rapport à K. Déterminer z_C affixe du point C.

c – Déterminer l'affixe du point B, image de M par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

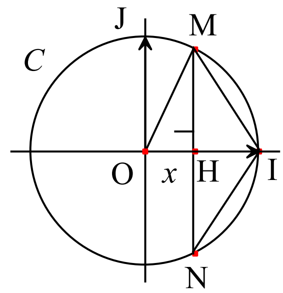
d – Déterminer l'affixe du point D, image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2+2i$.

3) Démontrer que K est le milieu de $[DB]$.

4) Soit le nombre complexe $Z = \frac{z_D - z_K}{z_A - z_K}$

a – Donner l'interpréter géométriquement du module et de l'argument de Z.
b – Vérifier que $Z = -i$
c – Montrer que $ABCD$ est un carré.

Exercice 3 :(*4,5 points*)



Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et le point I de coordonnée $(1;0)$.
M et N sont deux points du cercle C tels que (MN) perpendiculaire à (OI) et H est le point d'intersection des droites (OI) et (MN).
On pose $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$.

1) Calculer l'aire du triangle MNI en fonction de x.

2) f est la fonction définie sur $[-1;1]$ par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
a – Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1 et en 1.
b – En déduire une équation des tangentes à la courbe C_f représentative de f aux points d'abscisses -1 et 1.

3) a – Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$.
b – Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé (page 4 annexe).
5) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNI est-elle **maximale** ? Quelle est cette aire ?

Exercice 4 :(*6,5 points*)
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 2Cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $g(x) = 2Sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$.
On désigne par C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g.

1) a – Montrer que la droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de C_f et que le point $A\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f.

b – Déduire que l'on peut étudier f sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c – Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur I.

d – Construire, sur le graphique (page annexe), C_1 la partie de C_f relative à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, 3\pi\right]$

2) a – Montrer que pour tout réel x on a : $g\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$.

b – En déduire que C_g est l'image de C_f par une translation t dont on précisera le vecteur $\vec{u}$.

c – Tracer alors $C_2 = t_{\vec{u}}(C_1)$.

3) Soit la fonction h définie sur $[0, 2\pi]$ par : $h(x) = |Cosx| + \sqrt{3}|Sinx|$.

a – Exprimer h en fonction de f ou g sur chacun des intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

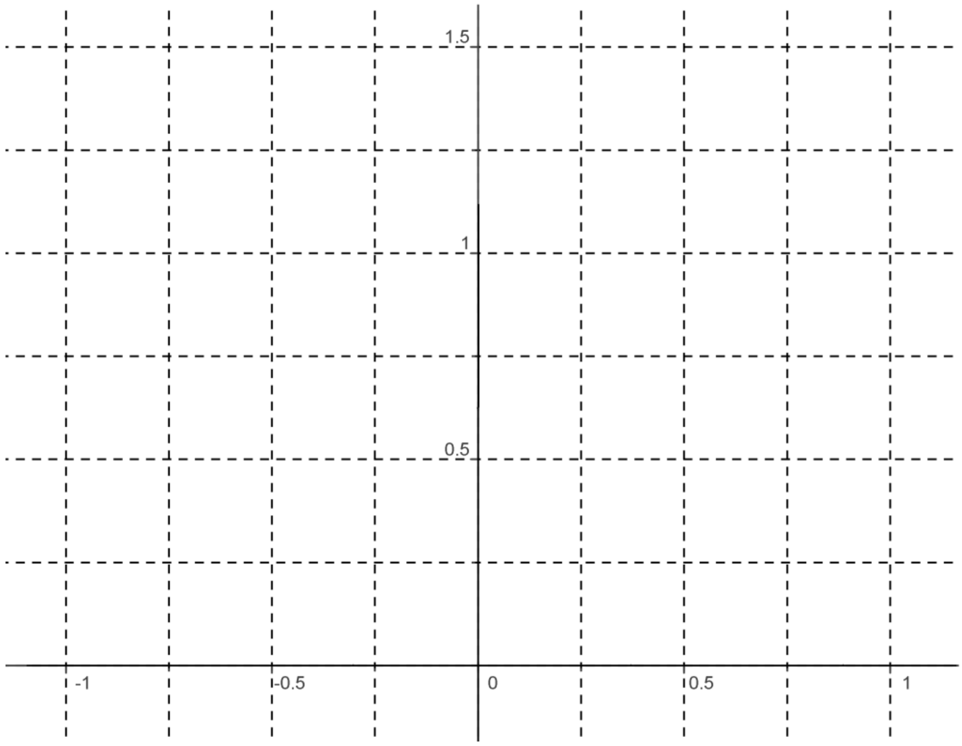
b – Tracer alors la représentation graphique de h dans le même repère en utilisant C_1 et C_2.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{g(x) + \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{2}}$ et en déduire $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x) + g(x)}{2x - \pi}$

Annexe

Nom : …………………………….. Prénom : …………………………………………… N° :……

Exercice3:



Exercice4: